Printed-Published & sold by
JAI KRISHNADAS-HARIDAS GUPTA,
The Chowkhamba Sanskrit Series Office,
VIDYA VILAS PRESS,
North of Gopal Mandir,
BENARES CITY.

* श्रीः *

* हरिदास-संस्कृत-सीरिज़ *

१८

* श्रीः *

परवलयक्षेत्रम्

(प्रश्नपत्रसहितम्)

ज्योतिषाचार्य पं० श्रीमुरलीधरठक्कुरविरचितम् ।

परिशोधितं च

प्रकाशकः—

जयकृष्णदास हरिदास गुप्तः—

चौखम्बा संस्कृत सीरिज़ आफिस,

विद्याविलासप्रेस, गोपालमन्दिर के उत्तर फाटक,

बनारस सिटी ।

१९८८

भूमिका ।

प्राचीनार्यवराहभास्करसुधावाचां गृहेष्वादरं
न प्राप्योपरतिं च वीक्ष्य मनसि स्वं देशमेवाजहात् ।
स्वाचारेतरमेवयैव विपुलं कीर्तिव्रजं चात्मनो
मत्वा सद्गणितं पयोधिवरणं कृत्वाऽन्यदेशं ययौ ॥ १ ॥
धीटारायरवालफर्मटमुख्यप्राचीनविद्यावतां
सत्सङ्गादपि नापि तत्र पदवीं लेभे निजाभीप्सिताम् ।
कालं क्लेशमयं निनाय नितरामुत्थाशयाभासता
नूनं कोऽपि जनिष्यतेऽत्र विपमे गोप्ता महीतेति च ॥ २ ॥
विद्वन्न्यूटनलिब्निजादिगणकैरत्यन्तसंसेवया
चिन्तां दूरतरं निरस्य सहसा नव्यं दधारास्पदम् ।
शाखाः संजनिताश्च तत्र कविधा शुभ्रा यशोवल्लरी
यास्मां देशविदेशमेत्य रमते विज्ञानगेहेऽधुना ॥ ३ ॥
सैकेयमत्र गहना गणकोपयुक्ता
वारागमेयसुरगीः पठनालयस्य ।
पारीक्ष्यक्रमनिबन्धविधौ निविघ्ना
छन्ना मया सुरवचः पिहितैव नाम्ना ॥ ४ ॥
संस्कृत्य तां च परिमृज्य सुवासनाभि-
र्देशान्तरीयवचनं परिहृत्य सर्वम् ।
ज्योतिर्विदाममलबोधविकाशनार्थं
नाम्ना ह्यनन्तवलयं विदधामि नूनम् ॥ ५ ॥
आशुतोषगिरां सारं संगृह्य गदितं मया ।
किन्त्वत्र रचिता मत्राः प्रतिज्ञा मे यथामति ॥ ६ ॥

छात्राणामुपकाराय प्रश्नाश्चात्र निवेशिताः ।
प्रतिज्ञान्तेऽपि ते सर्वे समाधेयास्तु तैः किल ॥ ७ ॥
ग्रन्थान्तेऽपि बहून् प्रश्नान् निक्षिप्य गदिता मया ।
बक्लेरागजा युक्तिः सुधीभिः सा विलोक्यताम् ॥ ८ ॥
इयं गणितपुस्तिका निखिलचिन्मनः स्वस्तिका
पराद्विवलयालया नभसि भाश्रया राजते ।
भजस्व बुध ! मानसे तनुधिया च तां तामसे
लभस्व मतिमुत्तमां गणितमार्गसन्दर्शिनीम् ॥ ९ ॥
संमार्जयन्तु गणकाः स्खलनं यदीह
मानुष्यकादिसहजच्युतिदोषजातम् ।
संधारयन्तु च तथा सुगुणानिहेति
संप्रार्थये हि मुरलीधरठक्कुरोऽहम् ॥ १० ॥
परिपूर्तिमगादियं सुपुस्तिश्चरणावासुसुबोधतो गुरोर्हि ।
अपठत सुजना इमामपूर्वां गणितज्ञानविशेषरक्षणार्थम् ॥ ११
आत्मानमामनन्तीह पण्डितं स्वयमेव ये ।
तेषां कृते श्रमो नायं किन्तु स्वल्पधियां वरः ॥ १२ ॥
हुतवहशरनागग्लौमिते वै शकाब्दे
व्यरचि गणितमेतत् काशिकायां स्थितेन ।
तदिह गणकवर्यो मुद्रणाय प्रदत्तं
सपदि हि जयकृष्णदासश्रेष्ठिने सज्जनाय ॥ १३ ॥

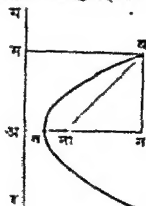
विनीतो
मुरलीधरः ।

* श्रीः *

परवलयगणितम् ।

काव्याटवीविहरणप्रियमानसानां
लोकोत्तरप्रथितकीर्तिकलाभिभाजाम् ॥
सन्मानसे विहरिणी कविकोकिलानां
वाग्देवता सपदि मे सुगिरं व्यनक्तु ॥ १ ॥
यत्क्षेत्रमानमवगम्यपदादतीतं
व्यासप्रमाणफलदं करणेऽप्रवीणम् ॥
रूपादिभेदकलितं ललितं गुणैस्तत्
विष्णोरनन्तवलयं जयतीव रूपम् ॥ २ ॥
यद्भूतलस्था नियतैकरेखा
तद्भूतलस्थो नियतो हि बिन्दुः ॥
प्रकल्पिते ते गणितप्रवीणै-
र्याभ्यां सदा चक्रसमन्वयः स्यात् ॥ ३ ॥
यः स्यान्निश्चलबिन्दुः या च स्याद्रेखिका नियता ॥
क्रमशो नाभिनदत्तौ कल्प्यौ क्षेत्रप्रपंचज्ञैः ॥ ४ ॥
क्षेत्रवृत्तिस्थितबिन्दोर्नाभिगता रेखिका कार्या ॥
लम्बनिभाऽन्या तस्माद्बिन्दोरेवाक्षरेखायाम् ॥ ५ ॥
यदि हि बुध ! समाने रेखयोस्तत्प्रमाणे
परवलयमिदं तत्क्षेत्रमाचार्यवर्यैः ॥
नवगणितविदां यै दर्शमार्गाग्रणीभिः
समुदितमिह खेटाचारमार्गप्रसिद्ध्यै ॥ ६ ॥
नाभिस्थानाद्दक्षगा लम्बरेखा
तद्वक्रस्य व्यासरेखोच्यते सा ॥

एवं यत्र व्यासरेखाग्रयोर्यो
योगः प्रोक्तो मूलबिन्दुः स एव ॥ ७ ॥
क्षेत्रे यत्र व्यासरेखा युनक्ति
नेम्यां तत्र क्षेत्रजात्योद्दर्शैः ॥
शीर्षस्थानं कल्पितं चाथ मूला-
द्बिन्दोर्ज्ञेया कोटिदोष्णोः प्रवृत्तिः ॥ ८ ॥
व्यासाग्रयोरुपरि लम्बनिभे हि रेखे
स्यातामिहापि परिधिस्थितबिन्दुतो ये ॥
यत्रात्र एवं रचना निखिलस्य मूले
ज्ञेयं बुधैरिह हि कोटिभुजाह्वये ते ॥ ९ ॥



यन=य बिन्दोर्व्यासरेखोपरि लम्बरेखा कोटिसंज्ञका। सदैव र अनेन संकेतिता भवति ।

स=वक्रस्य शीर्षस्थानम् ।

अत्र यदि हि धुवसमाने रेखयोस्तत्प्रमाणे इत्यादि विहित-वक्रपरिभाषया—

यदि　　　　यना=यम

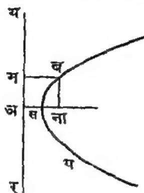
तदाऽनन्तरोक्तं वक्रं परवलयसंज्ञकं स्यादिति कथ्यते नवीनैः ।

अत्रैव जात्यत्रिभुजस्य कोटिं स्थिरीकृत्य तत्परितो भुज-भ्राम्यमाणेन यत्क्षेत्रमुत्पद्यते सैव समसूचीति निगद्यते। सा च स्वाधारासमानान्तरभूतलेन छिन्ना सती छेदनक्षेत्रं दीर्घवृत्तं-लादिकं संजायते। तत्र परवलयं तु कस्यापि सूचीकर्णस्य समानान्तरभूतलेन छिन्नायाः समसूच्याः छेदनप्रदेशो हि स्यादिति तावत्स्पष्टमेव सूचीक्षेत्रप्रपंचज्ञानां विदुषाम्। तेनेदं क्षेत्रं शङ्कुच्छिन्न (Conicsection) मिति चोच्यते । अतः परवलयक्षेत्रभूतलस्य कर्णगतभूतलेन सह तुल्यान्तरे वर्तमानत्वात्तद्भूतलं तत्कर्णं हित्वा सर्वानपि सूचीकर्णान् छिनत्ति तेन तद्व्यासोभयपार्श्वगयोः परवलयदोष्णोरनन्ते सम्मेलनं स्यादिति कल्पयितुं शक्यते । समानान्तररेखयोरनन्ते योगत्वसिद्धेः । अतोऽस्य क्षेत्रस्यानन्तवलयमिति नामनिर्देशः कृतोऽस्माभिः। महामतिमद्भिः सुधाकरद्विवेदिभिस्त्व (Parabolla) स्या यवनभाषाया अनुवादस्वरूपं परवलयमिति नामाकारि। अत एव महद्व्यासाग्रे छिन्नं दीर्घवृत्तमेवानन्तवलयापरनामकं परवलयसंज्ञकं स्यादिति कथ्यते नवीनैः । सप्रपंचस्य शङ्कुच्छिन्नक्षेत्रस्य ज्ञानार्थं मन्निर्मितप्रतिमाबोधकं विलोक्यम् यत् खलु चिरेणैव मुद्रापयिष्यन्तीत्याशास्महे ।

इति परिभाषा ।

प्रथमप्रतिज्ञा ।

स्वशीर्षनाभ्यन्तररेखिका या पराभिधा सा कथिता नवीनैः ।
द्विघ्नी परास्यादिह नाभिलग्ना कोटिः स्थिरा सन्ततमेव धीमन् ॥१॥



अत्रापि कल्प्यते असना = व्यासरेखा ।
ना = नाभिः ।
यर = अक्षरेखा
अ = मूलबिन्दुः
स = शीर्षस्थानम् ।
अत्र अस = सना = परः = प
वम = अक्षरेखोपरि लम्बरूपो भुजः
वना = व्यासरेखोपरि लम्बरूपा
नाभिमूलगकोटिः ।
अतोऽत्रापि परवलयपरिभाषया—
वना = वम
परं च वम = अना = २ सना
∴ वना = २ सना = २ प
अत उपपन्नं यथोक्तम् ।

द्वितीया प्रतिज्ञा ।

अथाभीष्टबिन्दोर्भुजं संविदित्वा
प्रवच्मीह कोटिप्रमाणं ततश्च ।
परोनो भुजो वेदनिघ्नः परेण
हतः कोटिवर्गो भवेत्सर्वदैव ॥ २ ॥

अत्र परिभाषागतकल्पितप्रथमक्षेत्रेण—

वना = वम = अन

यत्र वम वा अन भुजो ज्ञातस्ततो वन कोटेरानयनार्थमुपायः ।

अथ वनान जात्यत्रिकोणे

वनं = वनां — नानं
= (वना + नान) (वना — नान)
= (अन + नान) (अन — नान)
= (२ सना + २ नान) (२ सना)
= ४ प (प + नान)
= ४ प × सन
= ४ प (य — प)
रं = ४ प (य — प) उपपन्नम्

[२] उदाहरणान्तराणि ।

(१) यदि य बिन्दोः सव रेखोपरि लम्बरेखा व्यासरेखायां श बिन्दौ मिलेत्तदा नश रेखा द्विगुणस्थिरकोटिसमाना भवेत् ।

(२) नायन त्रिभुजोपरिगवृत्तस्य स बिन्दोः स्पर्शरेखा यन कोट्यर्धसमा भवतीति ।

(३) यदि सय समानान्तरा नाप विधीयते तथा च पम यदि प बिन्दोः कोटिः स्यात्तदा

नामं = सन × सम भविष्यति ।

(४) सय, कग द्वे रेखे सग रेखोपरि लम्बरूपे स्तः । कग रेखायाः कस्माच्चिदपि क बिन्दोः सक रेखा बन्धनीया ।

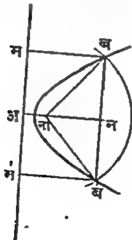
ततः सक रेखायां प विन्दुस्तथा कल्पितो यथा सव रेखोपरि पम लम्बः गक रेखायाः समानः संपद्येव । तदा प विन्दोश्चलनं परवलयपरिधौ स्याद्यस्य सव व्यासरेखा सग द्विग्रस्थिरा कोटिश्च स्यात् ।

(५) मियो लम्बयोः सबं, सय पूर्णज्ययोः य, यं द्वाभ्या मग्राभ्यां यन, यंनं द्वे कोटीस्तः । तदा सन × सनं = (२ स्थिरकोटि)² भविष्यतीति ।

(६) यनाबं एका नाभिगतपूर्णजीवाऽस्ति, तत्र ब, बं विन्द्वोः बन, बंनं कोटी स्तः । यदि सब, सबं संयोजनेन स्थिरकोट्या सह त, तं विन्द्वोर्लग्ने तदा नात = बंनं, नातं = बन भविष्यतीति ।

तृतीया प्रतिज्ञा ।

नाभ्यक्षरेखे निर्दिष्टे तदा विद्वन् प्रसाधय ।
परादिवलये धीमन् मतिस्ते चेत्पटीयसी ॥ ३ ॥



कल्प्यतेऽत्र ना=नाभिः
यर=अक्षरेखा च ।

अथ ना बिन्दोरक्षरेखो परि नाञ्च लम्बं विधाय तस्य स स्थाने भागद्वयं कृतम् । एवं च वर्धित अना रेखायां कुत्रापि न बिन्दुं प्रकल्प्य ना बिन्दोः अन व्यासार्धेन वृत्तखण्डमुत्पादनीयम् । तस्य तथा न बिन्दुगत अन रेखोपरि लम्बस्य च यत्र योगौ भवत स्तौ य, यं कल्पितौ । अतो य, स, य बिन्दवः परवलयपरिधौ भवन्तीति ।

अत्रोपपत्तिः । पूर्वक्रियया—
अन=नाय=नायं

एवं च क्षेत्रमित्या—
अन=यम=यंमं

∴ नाय=यम, नायं=यंमं

तेन यं, य बिन्दू परवलयपरिधौ वर्तेते । एवं च नाञ्च रेखायाः स बिन्दावर्धितो जातस्तेनात्रापि नास=सञ्च

अतः स बिन्दुरपि परवलये स्यादेवातोऽत्र य, यं, स बिन्दवः परवलये भवन्तीति सिद्धम् ।

अथ वा, ना स्थानात् यर अक्षरेखोपरि नाञ्च लम्बस्य स बिन्दावर्धितं विधेयम् । तत अक्षरेखायां कुत्रापि बिन्दुं प्रकल्प्य नाभिगता रेखा योजनीया । ततः कल्पितबिन्दावेवाक्षरेखोपरि लम्बविधायिनी रेखा नाभिगतरेखया सह यत्कोणमुत्पादयति तत्समानकोणोत्पादिनी नाभिस्थानादन्या रेखा कार्या । तस्या लम्बस्य च यत्र योगः स चापि बिन्दुः परवलये भवत्येव । एवमनेन प्रकारेणानेके बिन्दवः परवलये सिद्ध्यन्तीति धीमद्भिरवगन्तव्यम् ।

[३] अभ्यासार्थं कानिचिदुदाहरणान्तराणि प्रदर्श्यन्ते ।

(१) अक्षरेखायां न बिन्दुं मत्वा नाम रेखा कार्या । म

स्थानात् अक्षरेखोपरि लम्बं निपात्य सा बिन्दौ नाम रेखया सह नामश्च कोणसमः कोणः कार्यः । तथा कृते कोणोत्पादक-रेखाया लम्बरेखायाश्च योगः च कल्पितः । तदा च बिन्दुभ्रमणं परवलयपरिधौ भवति ।

(२) अथवा नाम रेखाया ल बिन्दौ समशकलं विधाय ततस्तद्रेखोपरि लथ लम्बोत्पादनेन मथ लम्बं च बिन्दौ युनक्ति । तदा च भ्रमणं परवलये स्यात् ।

(३) नाभिः शीर्षबिन्दुश्च निर्दिष्टस्तदाऽनन्तवलयं विर-च्यताम् ।

(४) नाभिं तथा परवलयपरिधिगतबिन्दुद्वितयं च विज्ञा-य परवलयं निर्णीयताम् ।

(५) तस्य वृत्तस्य केन्द्रभ्रमणमार्गो निर्णीयतां यत् किल निर्दिष्टरेखां स्पृशत् निर्दिष्टबिन्दुं च गच्छति ।

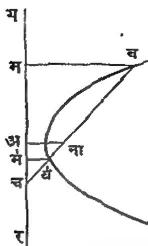
(६) तद्वृत्तकेन्द्रभ्रमणं परवलयपरिधौ भवेत्, यत् किल निर्दिष्टरेखां वृत्तं च स्पृशति ।

(७) घनार्थं एका नाभिगतपूर्णज्याऽस्ति, तत्र च, व बि-न्दुभ्यां व्यासरेखोपरि यदि धन, वन लम्बौ विधीयेते तदा सन × सन = सनौ भविष्यति ।

(८) अक्षरेखां परवलयपरिधौ बिन्दुद्वयं च विज्ञाय पर-वलयरचना विधेया । तथा सति परवलयद्वयं समुपपद्यते ।

चतुर्थी प्रतिज्ञा ।

या नाभिलग्ना किल पूर्णजीवा
या चाक्षरेखा हि तयोश्चयोगः ॥
विरामबिन्दुः परिकल्पनीयो
यकादिरेखागणितप्रवीणैः ॥ ४ ॥
समानसम्बन्धतया पूर्णजीवा विभज्यते ।
विरामनाभिबिन्दुभ्यां बहिरन्तः सदा बुध ॥ ५ ॥



कल्प्यतेऽत्र ना = नाभिः ।

यर = अक्षरेखा च

ययं = नाभिलग्ना पूर्णजीवा

च = विरामबिन्दुः ।

अत्र $\frac{\text{नायं}}{\text{नाय}} = \frac{\text{चयं}}{\text{चय}}$ भविष्यति ।

अत्रोपपत्तिः । अथ य, यं बिन्दुभ्यामक्षरेखोपरि यम, यंमं लम्बरेखे विधेये । तेन क्षेत्रमित्या यमच, यंमंच त्रिभुजे मिथः सजातीये ।

अतः सम्बन्धग्रहणेन—

$$\frac{\text{यंमं}}{\text{यम}} = \frac{\text{चयं}}{\text{चय}}$$

परं च पारवलयिकपरिभाषया—

$$\text{यम} = \text{नाय}$$

$$\text{यंमं} = \text{नायं}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{नाथं}}{\text{नाथ}} = \frac{\text{चथं}}{\text{चथ}}$$

एतेनोपपन्नं यथोक्तम् ।

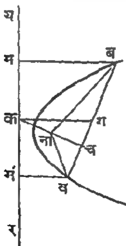
[४] अभ्यासार्थमुदाहरणान्तरे ।

(१) $\frac{१}{\text{बना}} + \frac{१}{\text{बच}} = \frac{२}{\text{बवं}}$ कथम् ?

(२) $\frac{१}{\text{चब}} + \frac{१}{\text{चसं}} = \frac{२}{\text{चना}}$ कथम् ?

पंचमी प्रतिज्ञा ।

चापस्य. पूर्णजीवाः स्युः समानान्तरगा भवेत् ।
मध्यबिन्दुगता रेखा तासां व्याससमान्तरा ॥ ६ ॥
सा चान्यव्यासरेखाख्या कल्पिता गणकैरिह ।
परादिवलये विद्वन् अन्यद्रोः कोटिसिद्धये ॥ ७ ॥



अत्र कल्प्यते यर = अक्षरेखा ।

ना = नाभिः ।

यय$'$ = अनेकासु समानान्तरपूर्णज्यासु कापि पूर्णजीवा ।

यम = य स्थानादक्षरेखोपरिलम्बः ।

य$'$म$'$ = य$'$,, ,,

अथ ना स्थानात् यय$'$ रेखोपरि नाच लम्बं विधाय चना वर्धनेनाक्षरेखायां क बिन्दौ लगति । कय कय$'$ रेखे तथा नाय$'$, नाय रेखे च योजनीये । क स्थानात् यम वा य$'$म$'$ समानान्तरा कग रेखा विधेया सैव पूर्णज्यामर्धयिष्यतीति ।

अत्रोपपत्तिः । अत्र क्षेत्रमितेः प्रथमाध्यायेन—

कम^2 = कय^2 — यम^2

परं च कय^2 = कच^2 + यच^2

एवं नाय^2 = नाच^2 + यच^2

उत्थापनेन—

कम^2 = कच^2 + यच^2 — (नाच^2 + यच^2)

= कच^2 — नाच^2

एवमेव कम$'^2$ = कय$'^2$ — म$'$य$'^2$

= कय$'^2$ — नाय$'^2$

= कच^2 — नाच^2

अत उपरोक्तस्वरूपदर्शनेन—

कम^2 = कम$'^2$

कम = कम$'$

परञ्च क स्थानात् मय वा म$'$य$'$ समानान्तरा कग रेखा पूर्वमेव विहिता । तेन कग यय$'$ पूर्णज्यां ग बिन्दावर्धयिष्यति । अतोऽत्र क बिन्दोस्तथा कग रेखायाश्च सन्ततं स्थिरत्वात् कग रेखा सर्वासां यय$'$ समानान्तरपूर्णज्यानां समानं भागद्वयं करोतीति सम्पन्नम् ।

अथ च कग रेखाया यम भुजरेखया तुल्यान्तरगत-

स्यात् व्यासरेखयाऽपि समानान्तरगतत्वं जातमत इयं कग रेखा व्याससहधर्मिणी चान्यव्यासपदवाच्येति धीमता ज्ञेयम् । तथाऽन्यव्यासस्य वक्रस्य च योगबिन्दुरन्यशीर्षस्थानं चोच्यते नवीनैरिति ।

अथवा, थ, थं बिन्दुभ्यां क्रमेण थना, थंना व्यासार्धाभ्यां ये द्वे वृत्ते संजायेते तयोः संपातगतारेखा यथं पूर्णज्यायां लम्बरूपा स्यात्तयाच मम रेखां सममागद्वयं करोतीति तावत्स्पष्टमेव रेखागणितज्ञानाम । ततो वासना सुबोधा ।

[५] अभ्यासार्थमुदाहरणान्तराणि ।

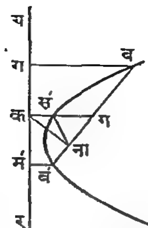
(१) यदि समानान्तरपूर्णज्याव्यासरेखाभ्यामुत्पन्न. कोणः पंचचत्वारिंशत्समस्तदाऽन्यव्यासरेखा स्थिरकोटयग्रगामिनी भवेत् ।

(२) यमाथं कापि नाभिगता पूर्णज्या, तत्र य, थं बिन्दुभ्यां व्यासरेखोपरि यम, थंमं लम्बौ स्तस्तदा ममं व्यासखण्डं स बिन्दोर्नाभिलग्नपूर्णज्यायाः समानान्तरपूर्णजीवासमं भवति ।

(३) सप कापि परवलयस्य पूर्णज्या । प स्थानात् सपं रेखोपरि लम्बनिपातेन व्यासरेखायां ग बिन्दौ लगति तदा सग रेखा नाभिगतसमानान्तरपूर्णज्या समा भवति ।

षष्ठी प्रतिज्ञा ।

नाभिप्रलग्ना किल पूर्णजीवा
या चान्यविष्कम्भदलीकृता स्यात् ।
तदर्धरेखा प्रमिताऽन्यकोटिः
तन्मूलबिन्दोरिह दोर्मितिः स्यात् ॥ ८ ॥
अन्यशीर्षगता रेखा नाभेरन्यः परः स्मृतः ।
द्विनिघ्नपरतुल्या स्यादन्यकोटिरिहापि च ॥ ९ ॥



अत्रापि कल्प्यते घर=अक्षरेखा

ना=नाभिबिन्दुः ।

घघं=नाभिगतपूर्णज्या या च कग अन्यन्यासेन ग बिन्दौ समद्विभक्ता भवति ।

सं=अन्यशीर्षस्थानम् ।

नासं=अन्यपरः=पं

घग=अन्यकोटिः=को ।

कग=अन्यभुजः=भु ।

तदा घग=२संना=२पं भविष्यति ।

अत्रोपपत्तिः । घर अक्षरेखोपरि घम, घंमं लम्बरूपे रेखे विधाय ना बिन्दोः घघं रेखोपरि गता नाक लम्बरेखा निवेशनीया । तेनात्रापि पारवलयिकपरिभाषया—

नासं=संक

∴ ∠संकना=∠कनासं

परंच कगना त्रिभुजस्य जात्यत्वात्—

∠क+∠ग=∠कनामं+∠गनासं

∴ ∠ग=∠गनासं

∴ नास′=स′ग.

∴ स′क=घ′ग.

अथ च चध′=नाच+न′ाच′
=घम+घ′म′

परंचात्र क्षेत्रमित्या—
२कग=घम+घ′म′

∴ धध′=२कग

∴ कग=$\frac{\text{धध′}}{२}$=धग

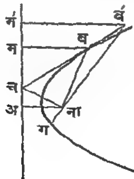
वा ∴ २ स′ना=चग

वा २ प′=धग=अन्यकोटिः ।

उपपन्नं यथोक्तम् ।

सप्तमी प्रतिज्ञा ।

परवलयस्थितबिन्दोर्यदि विह्न स्पर्शरेखिकां कर्तुम् ।
अभिलषसि तदा सत्वरमसिमतिदां युक्तिमाधेहि ॥ १० ॥
कार्येष्टबिन्दोरिह नाभिलग्ना रेखा किलैकाऽप्य च लम्बरूपा ।
अन्याऽक्षरेखोपरिगा च ताभ्यां संजायते यः परिधौ हि कोणः॥११॥
तत्कोणभागद्वयकारिणी या तद्बिन्दुगस्पर्शविधायिनी सा ।
रेखा किलोक्ता सततं बुधेन्द्रैरनन्तविद्यावलये परेऽस्मिन् ॥१२॥



अत्रापि कल्प्यते यर=अक्षरेखा
ना=नाभिः

अथ वक्रपरिधिगतकस्मादपि य विन्दोः अक्षरेखोपरि वम लम्बं विधाय वना रेखा योजनीया । तेन नावम कोणार्ध कारिणी रेखा य विन्दौ वक्रं स्पृशतीति ।

यदि चय कोणार्धकारिणी रेखा वक्रस्पर्शरेखा न भवे-दित्येवं क्षेत्रेणापि कथ्यते तदा चय वर्धनेनावश्यमेव वक्रं छिनत्ति । तथा सति छिन्नविन्दुः यं कल्पितः । ततः यंमं लम्बमक्षरेखोपरि कृत्वा यंना रेखा संपादनीया । तथा च नाच रेखा कार्या ।

ततः वमच, वनाच त्रिभुजयो.
वम=वना
वच=उभयनिष्ठः
तथा ∠नावच=∠मवच
∴ त्रिभुजे मिथ सर्वावयवेन समाने ।
तेन नाच=मच
∠मचव=∠नाचव
तथा च ∠वनाच=∠वमच ।
परच ∠वमच=समकोणः
∴ ∠वनाच=समकोणः ।

एवमेव यंमंच, यंनाच त्रिभुजयोः यं विन्दोर्वक्रपरिधौ गतत्वात्—

यंमं=यंना
यंच=उभयनिष्ठ.
तथा ∠यंचमं=∠यंचना

तेन चमंयं, चनायं कोणयोर्मध्ये प्रत्येकं समकोण, अथवा तयोर्योगश्च समकोणद्वयसम इति क्षेत्रमित्या स्पष्टम् ।

अत उभयपक्षतोऽपि यंनाच कोणस्य समकोणत्व जातमत

इदं साधितम् । तदन्तर्गत घनाच कोणस्य समकोणत्वेन सिद्धत्वात् । अतो वर्धित चव रेखा कुत्रापि वक्रे न भिनत्ति किन्तु तद्गतबिन्दोस्तस्य स्पर्शरेखैव स्यादित्युपपन्नम् ।

अथवा कल्प्यते वघं,कापि पूर्णज्या वर्धिता सती अक्षरेखायां च बिन्दौ लग्ना । तदा क्षेत्रमित्या—

$$\frac{\text{नाघ}}{\text{नाघं}} = \frac{\text{घम}}{\text{घंमं}} = \frac{\text{घच}}{\text{घंच}}$$

अतोऽत्र नाच रेखा घनाग कोणमर्धयिष्यति, पाश्चकोणत्वात् ।

अथ घ, घं बिन्द्वोरन्तरं यथा २ स्वल्पं स्वीक्रियते तथा २ नाच रेखया अर्धितो घनाग कोणः समकोणासन्नो भविष्यति । यदं तयोरन्तराभावेऽर्थादत्र घ बिन्दुः घं बिन्दावेव पतेत्तत्र घनाग, घनाघं कोणयोर्मध्ये प्रत्येकं समकोणसमस्तथा घच रेखा च घं बिन्दौ वक्रस्य स्पर्शरेखा स्यादित्युपपन्नम् ।

[७] उदाहरणान्तराणि ।

(१) शीर्षबिन्दुगतस्पर्शरेखा व्यासोपरिलम्बरूपा भवेत् ।

(२) परवलस्य तादृशी स्पर्शरेखा विधेया,या च व्यासरेखया सह निर्दिष्टकोणसमं कोणमुत्पादयति ।

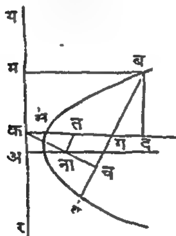
(३) नाभिस्थानात्स्पर्शबिन्दुजभुजमूलगामिनी रेखा स्पर्शरेखोपरि लम्बरूपा भवेत् । स्पर्शरेखाऽपि तस्याः समखण्डं करोति ।

(४) स्पर्शरेखायाः कस्माच्चिदपि बिन्दोः नाभिगता रेखा भुजमूलगरेखासमा स्यात् ।

(५) प बिन्दुगतस्पर्शरेखायां कस्माच्चन [illegible] बिन्दोः नाच रेखोपरिलम्बरेखा द्विगुणपरतुल्या स्यात्तदा प बिन्दुभ्रमणमार्गोऽन्विष्यताम् ।

अष्टमी प्रतिज्ञा ।

अथान्यविष्कम्भदलीकृतायाः
पूर्णज्यकाया दलमेव कोटिः ।
प्रकल्प्यते चेत्तु वदामि तत्र
कोटिप्रमाणं भुजतो बुधेन्द्राः ॥ १३ ॥
अन्यपरोनगुणं भुजमानं
वेद्हतं खलु कोटिकृतिः स्यात् ।
एवमनेकसरोपविशेषा
यत्कभवाः कथिता हि नवीनैः ॥ १४ ॥



अत्रापि कल्प्यते यर=अक्षरेखा
ना=नाभिः
कग=अन्यो व्यासः
यवं=काऽपि समानान्तरपूर्णज्या
कग=अत्रत्यो भुजः=भु
वग=अत्रत्या कोटिः=को
सं=अन्यशीर्षस्थानम् ।

$$\text{कनाच} = \text{पूर्णज्योपरि नाभिगतलम्बरेखा ।}$$

तेन $\text{घग}^{२} = ४\,\text{स}'\text{ग}\,.\,\text{नास}'$ भविष्यतीति ।

अत्रोपपत्तिः । अत्र चग समानान्तरां नात रेखां विधाय पंचमीप्रतिज्ञया—

$$\text{कम}^{२} = \text{कच}^{२} - \text{नाच}^{२}$$

परं च $\text{कम} = \text{घद्}$

$$\therefore \quad \text{घद्}^{२} = \text{कच}^{२} - \text{नाच}^{२}$$

परन्त्वत्र घगद्, कचग त्रिभुजयोः साजात्यतः—

$$\frac{\text{घग}^{२}}{\text{घद्}^{२}} = \frac{\text{कग}^{२}}{\text{कच}^{२}}$$

पुनरपि कनात, कचग त्रिभुजे साजात्ये

$$\text{अतः} \quad \frac{\text{कग}}{\text{कच}} = \frac{\text{कत}}{\text{कना}} = \frac{\text{कग}-\text{कत}}{\text{कच}-\text{कना}}$$

$$= \frac{\text{तग}}{\text{नाच}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{कग}^{२}}{\text{कच}^{२}} = \frac{\text{तग}^{२}}{\text{नाच}^{२}} = \frac{\text{कग}^{२}-\text{तग}^{२}}{\text{कच}^{२}-\text{नाच}^{२}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{घग}^{२}}{\text{घद्}^{२}} = \frac{\text{तग}^{२}}{\text{नाच}^{२}} = \frac{\text{कग}^{२}-\text{तग}^{२}}{\text{कच}^{२}-\text{नाच}^{२}}$$

$$\text{पर च} \quad \text{घद्}^{२} = \text{कच}^{२} - \text{नाच}^{२}$$

$$\therefore \quad \text{घग}^{२} = \text{कग}^{२} - \text{तग}^{२}$$

परन्त्वत्रापि (६) प्रतिज्ञया—

$$\text{कस}' = \text{स}'\text{त} = \text{नास}' = \text{अन्यपरः} = \text{प}'$$

$$\text{तेन} \quad \text{कग} = \text{स}'\text{ग} + \text{कस}' = \text{स}'\text{ग} + \text{प}'$$

$$\text{तग} = \text{स}'\text{ग} - \text{तस}' = \text{स}'\text{ग} - \text{प}'$$

$$\therefore \quad \text{घग}^{२} = (\text{स}'\text{ग} + \text{प}')(\text{स}'\text{ग} - \text{प}')$$

$$= ४\,\text{स}'\text{ग} \times \text{प}'$$

$$= ४\,\text{प}'\,(\text{सु} - \text{प}')$$

$$= \text{को}^{२}$$

(अनु) यदि कस्यापि व विन्दोः वग कोटिनाकृतिः =४ संग. पं भवेदत्र पं काऽपि स्थिरा संख्यास्यात्तदा तत्र व विन्दुभ्रमणमनन्तवलये भवेदिति ।

तथा हि-संग रेखायाः सं विन्दुं केन्द्रं मत्वा पं व्यासार्धनैकं वृत्तं विधेयम् । तस्य संग रेखायाश्च योगौ क, त कल्पितौ । ततः त विन्दोः वग समानान्तरा रेखा कार्या सा च वृत्ते ना विन्दौ लगति, कना, वग रेखयोर्योगश्च द विन्दौ जातः । एवं व स्थानात् कग रेखोपरि वद लम्बश्च निपात्यस्तदा प्रागुक्तप्रकारेण-

वग^{2}=कग^{2}-तग^{2}

एवं वद^{2}=कद^{2}-नाद^{2}

=कम^{2}

अस्मादपि वम=नाव सिद्धयति । तेन व विन्दुभ्रमणं परवलये भविष्यति, यत्र ना नाभिस्तथा कम रेखा चाप्त इति भवितुमर्हति ।

[८] अभ्यासार्थं कानिचिदुदाहरणान्तराणि प्रदर्श्यन्ते ।

(१) काऽपि संप पूर्णज्या यम, यवं रेखयोर्यदि ल, न विन्द्वोः क्रमेण संमिलेत्तदा संलं^{2}=संन·संप भविष्यतीति ।

(२) यदि यवं रेखा संप पूर्णज्यां न विन्दौ तथा प विन्दोर्व्याससमानान्तररेखां च नं विन्दौ छिनत्ति तदा

यनं=गन गतं भविष्यति ।

(३) यसव काऽपि पूर्णज्याऽस्ति । तत्र यग, धंगं अन्य कोटी स्तः । यपत्र यसवं पूर्णज्या संगमं अन्यन्यासरेखायां स विन्दावेव मिलेत्तदा संमं^{2}=संग संगं भविष्यति ।

अत्र पसं रेखां वर्धित्वा धं विन्दोर्व्याससमानान्तररेखायां द विन्दौ लग्ना । तथा द विन्दोरन्यकोटिसमानान्तररेखा वर्धित गसं रेखायां प विन्दौ च लगति तदा

यग^2: स'ग'^{2} = स'ग^2: स'ग·स'ग'

परं तु यग^2: स'ग^2 = य'ग'^{2}: स'प^2

∴ स'ग. स'ग' = स'प^2

∴ स'ग: स'प = स'प: स'ग'

अथ वा स'ग: पग = स'प: पग'

परं तु स'ग: पग = यस': यह

= स'ख: पग'

∴ स'प = स'ख

(४) यदि पख' काऽपि पूर्णज्या स'खग अभ्यस्यासेन ख बिन्दौ समछिन्नक्ता स्यात्तदा पख^2 = यग^2·य'ग'^{2} भविष्यति

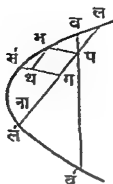
(५) कोऽप्यन्यो व्यासो यदि समानान्तरे द्वे पूर्णज्ये छिनत्ति तदा तत्खण्डद्वयघातयोः सम्बन्धोऽन्यशिरः स्थानात्पूर्णज्यावधिरेखयोः सम्बन्धेन समानः स्यात् ।

(६) पथं रेखा निर्दिष्टा, ग तन्निष्ठबिन्दोः ' गल रेखा स्थिरदिशायां तथा नि सार्या यथा स'ग रेखा यग-य'ग अनेन सह समनिष्पत्तिका स्यात् तदा स' बिन्दुभ्रमणं परवलये भवेत् । यत् खलु य, य' बिन्दुभ्यां गच्छति तथा यस्य व्यासरेखा स'ग समानान्तरा च भवेत् ।

(७) त्रिभुजे यद्याधारस्तथा फलं च स्थिरं कल्प्यते तदा शिरः कोणात्स्वसमुखभुजोपरि लम्बानां योगबिन्दुभ्रमणमनन्त वलयपरिधौ भवतीति निरूप्यताम् ।

नवमी प्रतिज्ञा ।

पूर्णज्यके द्वे यदि संमिलेतां
तदा तु खण्डद्वयघातयोर्हि ।
समः समानान्तरयोस्तयोश्च
निष्पत्तिको नाभिजपूर्णमौर्व्योः ॥१५॥



अत्र
संग = अन्यव्यासरेखा
ववं = प्रथमपूर्णज्या
ललं = द्वितीयपूर्णज्या
प = पूर्णज्ययोर्योगः
ना = नाभिः।

तदा $\dfrac{\text{वप} \times \text{वंप}}{\text{लप} \times \text{लंप}} = \dfrac{\text{ना बिन्दो ववं स. पूर्णज्या}}{\text{ना बिन्दो ललं स. पूर्णज्या}}$ भविष्यति।

अत्रोपपत्तिः। अत्र संग समानान्तरा पम तथा ललं समानान्तरा भथ कार्या.

तदा (६) प्रतिज्ञया—
लग = २संना
ललं = ४संना = ४पं
परं च लप × लंप = (लग + पग) (लग — पग)
= लग^2-पग^2
तथा (८) प्रतिज्ञया—
लग^2 = ४संग. पं
एवं पग^2 = मथ^2 = ४संथ. पं
लप × लंप = ४पं (संग — संथ)
= ४पं. गथ.
= ४पं. पम।

एवमेव वप × वंप = ४पं. पम

∴ (लप × लंप) / (वप × वंप) = (ना. स्थानात् लल' समान्तरा पृ. ४पं) / (ना स्थानात् वव' समानान्तरपृ ४पं)

उपपन्नं यथोक्तम् ।

(९) अभ्यासार्थमुदाहरणान्तराणि ।

(१) यदि मिथो मिलिने द्वे पूर्णज्ये द्वयोस्ताहशपूर्णज्ययोः समानान्तरे भवेतां तदा तत्खण्डद्वयघातयोर्निष्पत्तिः समाना भवेत् ।

(२) परवलपरिधौ त्रीन् विन्दून् व्यासदिशश्च विज्ञाय परवलयरचना कार्या ।

(३) परवलयान्तस्त्रिभुजं विरच्यताम्, यस्य त्रयो भुजा निर्दिष्टभुजत्रयैः समानान्तरा भवेयुः ।

दशमी प्रतिज्ञा ।

नाभिस्थानात्पूर्णजीवाग्रयोर्ये
रेखे ताभ्यां जायते यो वहिस्थः ।
कोणस्तस्यार्धं करोतीह रेखा
तत्पूर्णज्याहैक्यतो नाभिलग्ना ॥ १६ ॥

कल्प्यतेऽत्रापि यर = अन्तरेखा

ना = नाभिः।

यं = पूर्णज्या

∠ यनायं = पूर्णज्याग्रयोर्नाभिस्थाना-ङ्कयोरुत्पन्नः कोणः।

च = पूर्णज्यान्तयोर्योगः।

तदा चना रेखा यंनाय बाह्यकोणार्धं करिष्यतीति।

अत्रोपपत्तिः। यम, यंमं लम्बावन्तरेखोपरि निधाय क्षेत्र-मितेः षष्ठाध्यायेन—

$$\frac{\text{यंमं}}{\text{यम}} = \frac{\text{यंच}}{\text{यच}}$$

वा $$\frac{\text{नायं}}{\text{नाय}} = \frac{\text{यंच}}{\text{यच}}$$

अतः नाच रेखा यनायं कोणस्य बाह्यकोणमर्धयिष्यतीति। उपपन्नं यथोक्तम्।

[१०] अभ्यासार्थमुदाहरणान्तराणि प्रदर्श्यन्ते।

(१) परवलयपरिधौ बिन्दुद्वितयं नाभिं च विज्ञायान्तरे-खायाः साधनं निर्णेयताम्।

(२) अन्तरेखां नाभिं च विज्ञायानया प्रतिज्ञया परवल-यरचना विधेया।

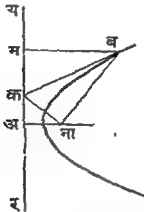
(अन्ययोपपत्तिज्ञानार्थं तृतीया प्रतिज्ञा दर्शनीया)

(३) प बिन्दुः परवलयपरिधौ स्यात्तत्र यदि पस रेखा स्पर्शरेखा यथिनाऽन्तरेखायां म बिन्दौ मिलति तदा मनाच कोणः ममकोणेन समानः स्यात्।

(४) यदि यं द्विगुणा कोटिरेखा स्यात्तथा यम रेखा प बिन्दौ परवलयपरिधौ लग्ना तदा पयं रेखा नाभिबिन्दु-गामिनी भवेत्।

एकादशी प्रतिज्ञा ।

नाभिस्थानात्स्पर्शविन्दौ गतैका
रेखा चान्या स्पर्शरेखाक्षयोगे ।
ताभ्यां नाभौ कोणमानं भवेद्यत्
तत्साम्यं स्यात्खाङ्कभागैर्हि नूनम् ॥ १७ ॥



अत्रापि यर=अक्षरेखा

ना=नाभिः ।

बक=ब विन्दोः स्पर्शरेखा

बम=अक्षरेखोपरिलम्बरेखा

क=स्पर्शाक्षरेखयोर्योगः ।

तेन ∠बनाक=समकोणो भविष्यति ।

अत्रोपपत्तिः । अत्र बकना, बकम त्रिभुजयोः

बना=बम

बक=उभयनिष्ठः

तथा ∠नाबक=∠मबक

अतः क्षेत्रमितेः प्रथमाध्यायेन—

बकना, बमक त्रिभुजे मिथः समाने

∴ ∠यनाक = ∠यमक

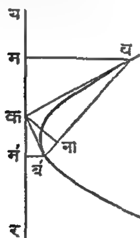
पर च ∠यमक = समकोणः

∴ ∠यनाक = समकोणः

उपपन्नं यथोक्तम् ।

द्वादशी प्रतिज्ञा ।

सखे नाभिसंपूर्णजीवाग्रबिन्द्वो-
र्यदि स्पर्शरेखे विधेये तदा तु ।
मिलेतां हि ते ध्रुवरेखैकबिन्दौ
समुत्पाद्य कोणं हि राद्धं न तुल्यम् ॥ १८ ॥



अत्र यर = ध्रुवरेखा
ना = नाभि
ययं = काऽपि नाभिगतपूर्णज्या
यक = य बिन्दोः स्पर्शरेखा
यम = लम्बः
कना = ययं रेखोपरि लम्बरूपा ।
यंमं = ध्रुवरेखोपरि लम्बरेखा

तदा कय′ रेखा य′ बिन्दोः स्पर्शरेखा भविष्यति तथा वकय′ कोणश्च समकोणेन समो भवतीति।

अत्रोपपत्तिः। अत्रापि कय′म′ त्रिभुजे

कम′^{2} = कय′^{2} − य′म′^{2}

= कय′^{2} − नाय′^{2}

= कना^{2}

∴ कम′ = कना

तथा च य′म′ = य′ना

कय′ = उभयनिष्ठः।

तेन कम′य′, कनाय′ त्रिभुजे मिथः समाने

∴ ∠कय′म′ = ∠कय′ना

एवं ∠य′कम′ = ∠य′कना.

अतः कय′ रेखा य′ बिन्दौ वकस्य स्पर्शरेखा सिद्धा।

अथ च ∠वकय′ = ½∠नाकम′ + ½∠नाकम

= ½(∠नाकम′ + ∠नाकम)

= ½ २ समकोणः

= समकोणः।

उपपन्नं यथोक्तम्।

[१२] अभ्यासार्थमुदाहरणान्तराणि।

(१) मम रेखा क बिन्दावेवाश्रिता भवेत्।

(२) यद्यक्षरेखास्थबिन्द्वोः परवलयस्य द्वे स्पर्शरेखे निर्मीयेते तदा तयोरन्तर्गतकोणः समकोणेन समानः स्यात्।

(३) नाभिगतपूर्णज्याव्यासमर्धं वृत्तं तत्रैवाक्षरेखां स्पृशति यत्र पूर्णज्याग्रबिन्द्वोर्विधीयमानयोः स्पर्शरेखयोः संमेलनं भवेत्।

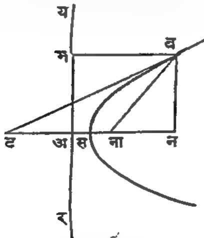
(४) यदि कस्यापि परवलयक्षेत्रस्य स्पर्शरेखाभ्यामुत्पन्नः कोणः समकोणः स्यात्तदा स्पर्शरेखाद्वययोगबिन्दुभ्रमणं [illegible]रेखायामेव भवेत्।

(५) स्पर्शविन्दू तथा स्पर्शरेखयोः संयोगविन्दुश्च निर्दिष्टस्तदा परवलयरचना विधेया ।

त्रयोदशीप्रतिज्ञा ।

स्पर्शरेखाव्यासयोगात्कोटिमूलावधिर्भवेत् ।
समस्पर्शाभिधा रेखा नवीनैरिति कथ्यते ॥ १९ ॥

समस्पर्शरेखा द्विधा स्यात्सदैव
शिरोविन्दुयोगेऽस्य तन्मानमेवम् ।
परोनो भुजो लोचनघ्नो भवेद्वै
ततोऽन्योऽपि भेदो विचिन्त्यः सुधीभिः ॥ २० ॥



अत्र कल्प्यते यर = अक्षरेखा
ना = नाभिः ।
व = स्पर्शविन्दुः
नास = व्यासरेखा
स = शिरः स्थानम् ।
वभ = अक्षरेखोपरि लम्बः
ट = स्पर्शरेखा व्यासयोगः ।

वन = कोटिः
न = कोटेर्मूलबिन्दुः ।

अतोऽत्र टन रेखा समस्पर्शरेखेत्युच्यते यस्य स बिन्दौ समानं शकलद्वयं भविष्यति, तथा टन रेखा छिन्न सन समा च भवतीति ।

अत्रोपपत्तिः । अत्र वट रेखायाः व बिन्दौ स्पर्शरेखात्वात्

∠ नावट = ∠ टवम

परं च क्षेत्रमित्या—

∠ टवम = ∠ वटना

∴ ∠ नावट = ∠ वटना

∴ वना = नाट

परं च नाव = वम = अन

∴ नाट = अन

∴ नान = अट

∴ सन = सट

∴ टन = २ सन

= २ (य-प)

अत्र य व बिन्दुगतभुज इति । तेनोपपन्नं सर्वम् ।

(१३) अभ्यासार्थं कानिचिदुदाहरणानि ।

(१) यदि ट बिन्दुः सन रेखायाः समशकलं विदधाति तदा न बिन्दुरपि नास रेखाया मध्यबिन्दौ पतति ।

(२) यदि नाम रेखा वट स्पर्शरेखायां ख बिन्दौ लगति तदा नख = टख भविष्यति ।

(३) यदि वट स्पर्शरेखा स बिन्दुगतस्पर्शरेखायां अ बिन्दौ मिलति तदा सअं = सना·सन भविष्यति ।

(४) यदि व स्पर्शबिन्दौ वट स्पर्शरेखायां लम्बो विधीयते तथा तदुपरि ना बिन्दोः नाह लम्बश्च निपात्यते तदा नाह² = सन × नाव

(२ नाह्=वट एतदर्थं द्वितीया प्रतिज्ञा दर्शनीया)

(५) शीर्षविन्दुः स्पर्शरेखा तथा स्पर्शविन्दुश्च निर्दिष्टस्तदा परवलयं विधीयताम् ।

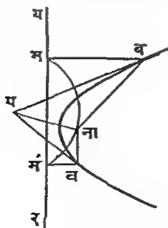
वस रेखां स्वमार्गे वर्धयित्वा वस=सच विधेया । ततः सच रेखाव्यासमवं वृत्तं विधेयम्, तत्तु स्पर्शरेखां यदि ट बिन्दौ छिनत्ति तदा टस रेखा व्यासरेखा भवेत् । ततो वक्ररचना सुबोधैव ।

चतुर्दशी प्रतिज्ञा ।

बाह्यबिन्दोरिह स्पर्शरेखिकाकरणं यदि ।
अनन्तवलयस्यैव तदेदमभिधीयते ॥ २१ ॥

या नाभिलग्ना खलु रेखिका स्यादभीष्टबिन्दोरिह तां प्रकल्प्य ।
भिज्यां तथा केन्द्रमभीष्टबिन्दुं तत्रैकवृत्तं सुधिया विधेयम् ॥२२॥
तद्धत्तरेखायुतिजातबिन्दोरक्षोपरिस्था खलु लम्बरेखा ।
युनक्ति वक्रेण तु यत्र तस्मात्स्वाभीष्टबिन्दौ विहितैकरेखा ॥२३॥

स्पर्शरेखा भवत्येव बाह्यबिन्दोरिति स्फुटम् ।
स्पर्शरेखाद्वयं जातमेवं ज्ञेयं विजानता ॥ २४ ॥



अत्रापि कल्प्यते   यर=अक्षरेखा
ना=नाभिः ।
प=अभीष्टबिन्दुर्यस्मात् परवलयस्य स्पर्शरेखा कर्तव्याऽस्ति ।

अथ प बिन्दुं केन्द्रं मत्वा पना त्रिज्यामितेन मनामं वृत्तं विधाय तस्याक्षरेखयोर्योगौ म, मं कल्पितौ । अथ च म, मं बिन्दुभ्यां यर अक्षरेखोपरि मय, मंयं लम्बरेखे समुत्पाद्य तयोर्वक्रेण सह योगौ य, यं कल्पितौ । पय, पयं रेखे च योजनीये ।

अतोऽत्र पय, पयं रेखे पत्र प बिन्द्वोः परवलयस्य स्पर्शरेखे भवत इति ।

अत्रोपपत्तिः । पम, पमं रेखे कार्ये ।

अथात्र पमय, पनाय त्रिभुजयोः—

मय=नाय

पम=पना

तथा   पय उभयनिष्ठः

तेन त्रिभुजे द्वे मिथः समाने भवतः ।

अतः $\angle$ मयप= $\angle$ नायप

तेन पय रेखा परवलयस्य य बिन्दौ स्पर्शरेखा जाता ।

एवमेव पयं रेखाऽपि यं बिन्दौ स्पर्शरेखा सिद्ध्यति । तेन प बिन्द्वोः स्पर्शरेखाद्वयं सम्पद्यते ।

अत्र पना रेखा यावत् प बिन्दोरक्षरेखोपरि लम्बरेखातोऽधिका स्यात्तावत्स्पर्शरेखाद्वयं वास्तवमेव संजायते । यदि पना रेखा लम्बेन समा स्यात्तत्र प बिन्दोः परवलयस्य परिधावेव वर्तमानत्वात्तत्रैकैव स्पर्शरेखा भवति । यदि च प बिन्दुः परवलयान्तर्वर्तते तदा तत्र स्पर्शरेखा नोत्पद्यत इति सर्वं रेखागणितविद्भिर्विद्भिरवगन्तव्यम् ।

[१४] अभ्यासार्थमुदाहरणान्तराणि ।

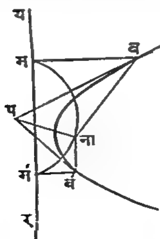
(१) यदि प बिन्दुरक्षरेखोपरि स्यात्तदा स्पर्शरेखाभ्यामुत्पन्नः कोणः समकोणेन समानः प्रदर्श्यताम् ।

(२) यदि प बिन्दुर्यर्धितव्यासरेखायां वर्तते तथा पस=$\frac{प}{४}$ भवेत्तदा पवनाव क्षेत्रं समसमानान्तरचतुरस्रं भवेत्

(३) अथ वा प बिन्दोः पना व्यासार्धेन विहितवृत्तस्याक्षरेखायाश्च योगौ म, मं कल्पितौ, तत्र प बिन्दोः मना, मंना रेखयोरुपरि यौ लम्बौ निःकास्येते तावेव परवलयस्य स्पर्शरेखे भवेताम् ।

पंचदशीप्रतिज्ञा ।

यदि द्वे स्फुटे स्पर्शरेखे भवेतां
सखे बाह्यबिन्दोस्तदा तत्र नाभेः ।
पृथक् स्पर्शरेखाग्रगाभ्या समुत्थौ
सदा रेखिकाभ्यां समानौ हि कोणौ ॥ २५ ॥
पत्रभेत्र त्रिकोणे द्वे स्पर्शरेखाधरागते ।
नाभिशीर्षे भवेतां हि सजातीये सदा बुध ॥ २६ ॥



अत्रापि कल्प्यते यर = अक्षरेखा

ना = नाभिः ।

प = यं, य विन्द्वोः स्पर्शरेखयो योगविन्दुः ।

तदा ∠ यनाप = ∠ यंनाप,

तथा यनाप, यंनाप त्रिभुजे च मिथः समानकोणके भवेताम् ।

अत्रोपपत्तिः । य, यं विन्द्वोरक्षरेखोपरि यम, यंमं लम्बौ समुत्पादनीयौ, तेन म,ना,मं विन्दुत्रयगतमेकं वृत्तं भविष्यति यस्य केन्द्रं प स्यादिति प्रागुक्तबहिर्विन्दुस्पर्शरेखाकरणयुक्त्या स्पष्टमेव ।

अतः यमप, यनाप त्रिभुजयोर्मिथस्तुल्यत्वात्—

∠ यमप = ∠ यनाप,

एवं ∠ यंमंप = ∠ यंनाप

परं च ∠ यमर = ∠ यंमंय = समकोणः

तथा ∠ पमम = ∠ पमंम

∴ ∠ यमप = ∠ यंमंप

∴ ∠ यनाप = ∠ यंनाप

अथ च ½ ∠ नापमं = ∠ नाममं

∴ ∠ नापयं = ∠ नाममं

परं च ∠ नाममं + ∠ नामय = समकोणः

∴ ∠ नामय + ∠ मयप = समकोणः

∴ ∠ नाममं = ∠ मयप = ∠ नायप

∴ ∠ नायंप = ∠ नापय

तेन नापय, नापयं त्रिभुजे मिथः सजातीये सम्पन्ने । अत उपपन्नं यथोक्तम् ।

[१५] कानिचिदुदाहरणान्तराणि प्रदर्श्यन्ते ।

(१) यदि प बाह्यविन्दुर्यस्मात् परवलयस्य स्पर्शरेखे विहिते । यं, य स्पर्शविन्दू च स्तस्तदा पय पयं = पना तथा पयः पयं = नायः नायं भवति ।

(२) यदि व्यासरेखागतकस्माच्चनविन्दोः परवलयस्य ये द्वे स्पर्शरेखे ते कयाऽपि तृतीयस्पर्शरेखया छिन्नेभवतस्तदा तच्छिन्नविन्दू नाभिस्थानात्समान्तरौ भवेताम्।

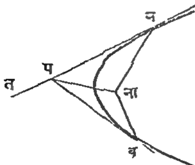
(३) प विन्दोः व्याससमानान्तरा रेखा कार्या, तत्र पना समानान्तरे रेखे प विन्दोः स्पर्शरेखाभ्यां समानावेव कोणौ समुत्पादयतः।

(४) पयर्व कोणस्य समभागद्वयकारिणी रेखा व्यासरेखायां र विन्दौ लग्ना तदा नाप=नार भविष्यति।

(५) यदि बाह्यविन्दोः परवलयस्य द्वे स्पर्शरेखे विधीयेते तदा तत्रैकस्पर्शरेखाव्यासरेखाभ्यां यः कोणः स एव बाह्यबिन्दोर्नाभिगतरेखाऽन्यस्पर्शरेखाभ्यां समुत्पन्नः कोणो भवतीति।

षोडशी प्रतिज्ञा।

अथ स्पर्शरेखायुतौ कोणमान
सखे बाह्यलग्नं भवेद्यत्तदेव।
बुधा नाभिशीर्षाख्यकोणेन तुल्यम्
सदा जायते स्पर्शरेखाधरायाम् ॥ २७ ॥



अत्र कल्प्यते   ना = नाभि ।
 यप = य विन्दुगतस्पर्शरेखा
 यंप = यं ,, ,,
तेन   ∠यंपत = ∠यनाप भविष्यति ।

अत्रोपपत्तिः । अत्र नाय, नाप, नायं रेखाश्च संयोजनीयाः ।

अतः नायप त्रिभुजे क्षेत्रमित्या—

∠यनाप + ∠नायप + ∠नापय = २समकोणः ।

परं च प्रागानीतप्रकारेण—

 ∠नायप = ∠नापयं
∴ ∠यनाप + ∠नापयं + ∠नापय = २सम
वा ∠यनाप + ∠यपयं = २समकोण॰
परं च ∠यपयं + ∠यंपत = २समकोणः ।
∴ ∠यंपत = ∠यनाप

उपपन्नं यथोक्तम् ।

[१६] कानिचिदुदाहरणानि ।

(१) किमपि परवलयं समत्रिभुजस्य कमपि भुजं स्पृशति तदा नाभिबिन्दोः तत्स्पर्शभुजसंमुखकोणगामिनी रेखा स्पर्शबिन्दुगतैव भवतीति ।

(२) अयस त्रिभुजस्य अय आधारस्तथा स शीर्षकोणश्च निर्दिष्टस्तदा परवलयस्य नाभिबिन्दुभ्रमणं वृत्तं भवति यदि परवलयं सय, सय भुजौ अ, य बिन्दोरेव स्पृशति ।

(३) यदि ययंय त्रिभुजोपरिगवृत्तस्य केन्द्रं च कल्प्यते तदा य, य, यं बिन्दुत्रयगतं वृत्तं नाभिबिन्दुगतमपि स्यात् ।

सप्तदशी प्रतिज्ञा ।

तिसृभिः स्पर्शरेखाभिस्त्रिकोणं यत्प्रजायते ।
तदीयोपरिगं वृत्तं नाभिबिन्दुगतं भवेत् ॥ २८ ॥

अत्र, कल्प्यते कथ, कथं स्पर्शरेखयोर्योगः = क,
अथ, अच स्पर्शरेखयोर्योगः = अ,
एवमेव गच, गचं स्पर्शरेखयोर्योगः = ग

तदा अकग त्रिभुजोपरिगं वृत्तं नाभिबिन्दुगतं भविष्यतीति । अत्र ना = नाभिः ।

अत्रोपपत्तिः । अत्रापि नाथ, नाअ, नाक, नाग तथा नाच रेखाश्च कार्याः ।

तेन पूर्वक्षेत्रेण—

नाथक, नाथंक त्रिभुजयोः सजातित्वात्

∠नाथक = ∠नाकथं

एवं नाथअ, नाअच त्रिभुजयोः साजात्यतः

∠नाथअ = ∠नाअच

∴ ∠नाअच = ∠नाकचं

परंचाथैतयोः कोणयोः गना रेखोपरिवर्तमानत्वात् अ, क, ग, ना बिन्दवो वृत्तपरिधौ भवन्तीति क्षेत्रमित्या स्फुटमेवात उपपन्नं यथोक्तम् ।

[१७] अत्राभ्यासार्थमुदाहरणान्तराणि ।

(१) निर्दिष्टरेखात्रितयस्पर्शकारिणः परवलयस्य नाभिबिन्दुभ्रमणमार्गो निर्णीयताम् ।

(२) परवलयस्य स्पर्शरेखात्रयनिर्मितत्रिभुजे शीर्षकोणतः संमुखभुजोपरि गतानां लम्बानां संपातबिन्दुस्तद्दत्तरेखायामेव भवतीति ।

(३) यदि अ, क, ग बिन्दुभि नाअ नाक, नाग रेखात्रयोपरि लम्बा विधीयन्ते तदा तेषां संमेलनमेकस्मिन्नेव बिन्दौ भवेत् ।

अष्टादशी प्रतिज्ञा ।

या स्पर्शरेखाद्वययोगबिन्दो-
व्यासस्य तुल्यान्तररेखिका स्यात् ।
समद्विभागं प्रकरोति सा वै
स्पर्शाख्यबिन्दुद्वयलग्नमौर्व्याः ॥२६॥

अत्रापि कल्प्यते धर = अक्षरेखा ।
ना = नाभिः ।
प = स्पर्शरेखयोर्योगबिन्दुः ।
बबं = स्पर्शगामिनी पूर्णजीवा ।
पच = व्याससमान्तरा रेखा ।

तद्वा यथं पूर्णज्यायाः च विन्दौ समद्विभागं भविष्यतीति ।

अत्रोपपत्तिः । य, यं विन्दुभ्यां यम, यंमं लम्बरेखे विधाय-पम, पमं, पना, नाय रेखाश्च संयोजनीयाः ।

अथ　पयम, पयना त्रिभुजयोः—

यम = नाय

पय = उभयनिष्ठः ।

तथा　∠पयम = ∠पयना

तेन　त्रिभुजे च सर्वावयवेन समाने भवतः ।

∴　पम = पना

एवमेव　पमं = पना

∴　पम = पमं

अथ च　पमक, पमंक त्रिभुजयोः—

पम = पमं

पक = उभयनिष्ठः

तथा　∠पकम = ∠पकमं = समकोणः । अतस्त्रिभुजे च मिथः समाने ।

तेन　कम = कमं

अत क विन्दुः ममं भुजस्य मध्यविन्दुः । परन्तु कच रेखा यम वा यंमं समानान्तराऽस्ति, तेन च विन्दुरपि यथं पूर्णज्याया मध्यविन्दुर्भवतीति सर्वमुपपन्नम् ।

[१८] अभ्यासार्थं कानिचिदुदाहरणानि ।

(१) कस्या अपि पूर्णज्यायाः प्रान्ताभ्यां विहितयोः स्पर्शरेखयोः संपातः पूर्णज्यार्धविन्दुगतान्यव्यासरेखायामेव भवेत् ।

(२) नाभिगतपूर्णज्याव्यासभवं वृत्तमक्षरेखां स्पृशति ।

(३) परवलये स्पर्शविन्द्वोः स्पर्शरेखयोरुपरि निर्मितयोर्लम्बयोः संमेलनं तत्स्पर्शविन्दुगतपूर्णज्यार्धगतान्यव्यासरेखायां भवतीति ।

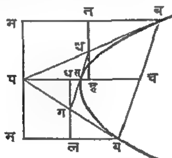
(४) द्वे स्पर्शरेखे तथा स्पर्शविन्दू च विज्ञाय परवलयस्याक्षरेखा नाभिश्च निर्णेतव्यः ।

(५) स्पर्शबिन्दुद्वयगतपूर्णज्याया समानान्तरे वर्तमाना या कस्याश्चपि रेखाया परवलयस्पर्शरेखान्तर्गते शकले समाने भवेताम् ।

(६) यदि पव, पन द्वे स्पर्शरेखे स्त , स्पर्शबिन्दुद्वयगत पूर्णज्याया मध्यबिन्दु ग स्यात्तदा पव पन = २ पना-पग भविष्यति ।

एकोनविंशीप्रतिज्ञा ।

या स्पर्शरेखाऽग्र्यशिरोगता स्यात्
समान्तरा सा कथिता नवीनै ।
अग्र्याभिधव्यासदलीकृताया
पूर्णज्यकाया इति धीमतोह्यम् ॥ ३० ॥



कल्प्यते स = अग्र्यशीर्षस्थानम् ।

पसच = अग्र्यव्यास

गसथ = स स्थानात्स्पर्शरेखा

यस्या समानान्तरा वय पूर्णजीवा कृता । तदा वय पूर्णज्या च बिन्दावर्धिता भविष्यतीति ।

अत्रोपपत्ति । अत्र व, य बिन्द्वो स्पर्शरेखयोर्योगबिन्दुः प कल्पित । तथा च स बिन्दुगतस्पर्शरेखा पव रेखायां थ बिन्दौ तथा पय रेखायां च ग बिन्दौ लग्ना । प बिन्दो पच

रेखायां मपमं लम्बरेखां विधाय तदुपरि वम तथा वंमं लम्ब रेखे च कार्ये । एवं ग, थ बिन्दुभ्यां घगल, तथह समानान्तरे कार्ये ।

अतः क्षेत्रमितेः षष्ठाध्यायेन—

$$\frac{तथ}{मप} = \frac{वथ}{वप}$$

$$= \frac{गथं}{पवं}$$

$$= \frac{गल}{पमं}$$

परं च पूर्वक्षेत्रयुक्त्या—

मप = पमं

∴ तथ = गल

परं पूर्वयुक्त्यैव गल = गध

तथा तथ = हृथ

∴ गल = तथ

= गध

= हृथ

∴ संग = संथ

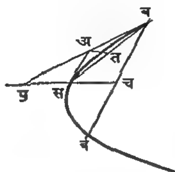
अत्र पथर्थ त्रिभुजे गथ रेखा थर्थ आधारसमानान्तरा वर्तते तथा च पथं रेखया सं बिन्द्वार्धिता च स्यात्तेन थर्थ पूर्णज्याऽपि पथ रेखया स बिन्द्वावेव समद्विभक्ता भवेदिति । अत उपपन्नं यथोक्तम् ।

इत्यनयोपपत्त्या "यावन्त्यः पूर्णजीवाः स्युः समानान्तरगाः" इत्याद्युक्तमपि सुखेनैवोपपद्यते ।

विंशीप्रतिज्ञा ।

अथ स्पर्शरेखाऽन्यविष्कम्भयोगात्
स्वकीयान्यकोटेर्हि मूलान्तराला ।

सदा रेखिका चान्यशीर्षाख्यबिन्दौ
द्विधा जायते धीमतेदं विचिन्त्यम् ॥ ३१ ॥



अत्र कल्प्यते　　स′ = अन्यशीर्षस्थानम् ।
यय′ = पूर्णज्या ।
पच = अन्यव्यासः ।

तदा पच रेखा स′ बिन्दौ समद्विभक्ता भविष्यतीति ।

अत्रोपपत्तिः । स′ स्थानात्परवलयस्य स्पर्शरेखां विधाय तस्याः पय रेखायाश्च योगः अ । सय′ रेखां संयोज्य, अ स्थानात् पच समानान्तरा अत रेखा कार्या ।

अत्र अ स्पर्शरेखयोर्योगबिन्दुस्तथा च सय′ स्पर्शबिन्दुद्वयगतपूर्णज्या ।

अतः　　स′त = यत

परं च पूर्वयुक्त्या—

स′अ ∥ पच

पयच त्रिभुजे

$$\frac{\text{पस}'}{\text{स}'\text{च}} = \frac{\text{पअ}}{\text{अय}}$$

पय　　$$\frac{\text{पअ}}{\text{अय}} = \frac{\text{स}'\text{त}}{\text{तय}}$$

पर च संत=वत

∴ पश्र=श्रव

∴ पर्स=संच

श्रत उपपन्नं यथोक्तम्।

[२०] श्रभ्यासार्थं कानिचिदुदाहरणान्तराणि प्रदर्श्यन्ते।

(१) परवलये समानान्तरपूर्णज्याग्राभ्यां विहितयोः स्पर्शरेखयोः संपात एकस्यां रेखायामेव भवेत्।

(२) यदि पच=वच तदा पविन्दूरस्तरेखायामेव स्यात्।

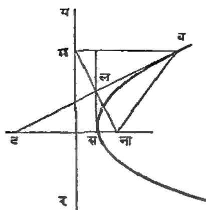
(३) यदि सं विन्दोरन्यस्यास श्रक्षरेखायां क विन्दौ तथा सं विन्दौ वक्रस्पर्शरेखायाः समानान्तरायां नाभिगतपूर्णज्यायां ग विन्दौ च लगति तदा संग=कसं भविष्यति।

(४) यदि संय, संयं द्वे पूर्णज्ये स्तस्तत्र सय रेखा यं विन्दुगताम्यव्यासरेखायां त विन्दौ तथा संयं रेखा य विन्दोरन्यव्यासरेखायां च थ विन्दौ मिलति तदा तथ रेखा सं विन्दुगतस्पर्शरेखायाः समानान्तरा भवेत्।

एकविंशीप्रतिज्ञा।

चेत्स्पर्शरेखोपरि लम्बरेखा
नाभिस्थविन्दोः क्रियते तदा तु।
शिरोगतस्पर्शसुरेखिकायां
तल्लम्बमूलभ्रमणं भवेद्धि॥ ३२॥

एवं भुजमितिः क्षुण्णा परेण नियतं भवेत्।
पराद्विवलये विद्वन् लम्बवर्गमितिः सदा॥ ३३॥



अत्र कल्प्यते　यर = अक्षरेखा
ना = नाभिः
वट = व बिन्दौ स्पर्शरेखा
स = शिरः स्थानम्
नास = व्यासरेखा
ट = व्यासरेखाद्वयोर्योगः ।

अथ स बिन्दुगतस्पर्शरेखा कार्या सा च वट स्पर्शरेखायां ल बिन्दौ लग्ना। नाल, मल रेखे च विधेये ।

तदा नाल, मल एकैव रेखा भवति तथा वट स्पर्शरेखोपरि लम्बरूपा च स्यादिति ।

अत्रोपपत्तिः । अत्र नावल, मवल त्रिभुजयो.—

नाव = मव
वल = उभयनिष्ठः

तथा　$\angle$ नावल = $\angle$ मवल
अतः　त्रिभुजे च मिथः समाने
$\therefore$　$\angle$ नालव = $\angle$ मलव

यतः नालव, मलव कोणयोर्मध्ये प्रत्येकं समकोणसमस्तेन

नाल, मल रेखे ह्येकस्मिन्नेव मार्गे भवतस्तथा यट रेखोपरि-लम्बरूपा च स्यादिति ।

एवं सर्वासां स्पर्शरेखाणां मल रेखया सह यत्र यत्र योगो भवति तत्र तत्र नाभिस्थानादुद्गता रेखा तत्तत्स्पर्शरेखोपरि-लम्बरूपा सिद्ध्यत्यतः सर्वेषां लम्बमूलानां भ्रमणं मल रेखाया-मेव भवतीति सम्यगुपपन्नम् ।

एवं च मायल, मासल त्रिभुजयोः सजातित्वात्—

$$\frac{\text{माल}}{\text{माय}} = \frac{\text{मास}}{\text{माल}}$$

$\therefore$ माल² = माय·मास

परं माय   माय = य = भुजः ।

मास = परः = प

$\therefore$ माल² = य × प

एतेनोपपन्नं सर्वम् ।

(२१) अभ्यासार्थमुदाहरणान्तराणि ।

(१) नाभ रेखा न बिन्दौ समद्विभक्ता भवेत् ।

(२) परवलये द्वे स्पर्शरेखे नाभिं च विधाय परवलय-रचना विधेया ।

(३) चतुर्थंश स्पर्शरेखा नाभिश्च निर्दिष्टास्तदा परवलय-स्य शीर्षबिन्दुभ्रमणं वृत्तगतं भवेत् ।

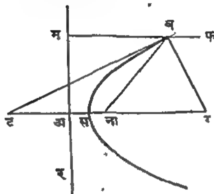
(४) द्वे स्पर्शरेखे तथा नाभिश्च निर्दिष्टास्तदाऽक्षरेखाया-मान विधीयताम् ।

(५) नाभि स्थानरेखा तयोर्द्वे स्पर्शरेखे च विधाय परव-लयस्य रचना विधेया ।

द्वाविंशोऽभिलाषः ।

या स्पर्शरेखोपरि लम्बरेखा
स्पर्शार्थरेखो विवरे बुधेन्द्रैः ।
[illegible]
[illegible] ॥ १४ ॥

स चापि तत्स्पर्शगनाभिरेखा-
दोर्भ्यां समुत्पन्नबहिः स्थकोणम् ।
दलं करोतीति बुधाः वदन्ति
वक्रीयरेखागणितप्रवीणाः ॥ ३५ ॥



अत्रापि कल्प्यते यर = अक्षरेखा
ना = नाभिः ।
बट = ब बिन्दोः स्पर्शरेखा
अ = मूलबिन्दुः
स = शीर्षस्थानम् ।
नासअ = व्यासरेखा
बम = अत्रत्यो भुजः ।
बग = तत्रस्थो मध्याभिधलम्बः,
= ब बिन्दौ बट स्पर्शरेखो-
परि लम्बरूपः ।

अयं नाबफ कोणस्य दलं करिष्यतीति ।

अत्रोपपत्तिः । ∠मबट = ∠नाबट

यतः ब ∠नाबट + ∠नाबग = समकोणः

तथा ∠मवट + ∠नावट + ∠नावग + ∠गवफ = २सम

∴ ∠मवट + ∠गवफ = समकोणः

∴ ∠नावग = ∠गवफ

उपपन्नं यथोक्तम् ।

त्रयोविंशी प्रतिज्ञा ।

मध्यलम्बो व्यासेन यं कोणमुपपादयेत् ।
तत्समं नाभिगस्पर्शबिन्दुगामिकरेखया ॥ ३६ ॥

अत्रोपपत्तिः । पूर्वस्मिन् क्षेत्रे नाग, घफ रेखे समानान्तरे वग रेखा छिनत्ति तेन क्षेत्रमित्या—

∠नागव = ∠गवफ

परं च ∠गवफ = ∠नावग

∴ ∠नागव = ∠नावग

उपपन्नं यथोक्तम् ।

[२३] अभ्यासार्थं कानिचिदुदाहरणानि प्रदर्श्यन्ते ।

(१) यदि वर्ध काऽपि पूर्णज्या व बिन्दौ मध्यलम्बो भवेत्तथा धनाव कोणश्च समकोणेन समानः सम्पद्येत तदा २नाव = माव भविष्यति ।

(२) माम, वट रेखे मिथो लम्बरूपे भवेताम् । तथा तद्विन्द्वावधिते च भवतः ।

(३) यदि नावग समत्रिभुज स्याच्चदा टमग कोणः समकोणसमो भवेत् ।

(४) यदि स्पर्शरेखाऽऽत्तयोर्योगः प बिन्दुः कल्प्येत तदा ना, प, म, व बिन्दवो वृत्तपरिधौ भवन्ति यद्वृत्त वग रेखां व बिन्दावेव स्पृशति ।

चतुर्विंशी प्रतिज्ञा ।

स्पर्शबिन्दुस्तथा व्यासस्पर्शरेखायुतिस्तथा ।
मध्यलम्बव्यासयोगो नाभेस्तुल्यान्तरः सदा ॥ ३७ ॥

अत्रोपपत्तिः । अत्रापि प्रागुक्त (२२) क्षेत्रे

$\angle$ नायग $=$ $\angle$ नागय

$\therefore$ नाय $=$ नाग

एवमेव $\angle$ यटना $=$ $\angle$ नायट

$\therefore$ टना $=$ नाय

$\therefore$ नाय $=$ नाग $=$ टना ।

उपपन्नं यथोक्तम् ।

पंचविंशी प्रतिज्ञा ।

व्यासेन यत्र युतिमेव करोति मध्यो
लम्बस्ततो भवति कोटितलान्तरालः ।
रेखा सदेह गणिते समलम्बसंज्ञ-
स्तन्मानमेव हि बुधा द्विगुणं परं स्यात् ॥ ३८ ॥
समलम्बसमस्पर्शरेखयोराहृतिः सदा ।
कोटिवर्गमितिः सा स्यादथवाऽन्यप्रकारतः ॥ ३९ ॥

अत्रापि पूर्वं चतुर्विंशतिप्रतिज्ञायां प्रतिपादितक्षेत्रे

यर $=$ अक्षरेखा

ना $=$ नाभिः

टग = स्पर्शरेखाव्यासयोगः
ग = मध्यलम्बव्यासयोगः
घन = कोटिः
न = कोटितलम् ।
स = मूलबिन्दुः
सना = द्विगुणपरः ।
गन = समलम्बाभिधः ।

तदा गन रेखा सना समा भविष्यतीति ।

अत्रोपपत्तिः । पूर्वयुक्त्या—

टना = नाग = नाप = पम

∴ नाग = सन

∴ सना = नग

∴ समलम्बः = २परः ।

उपपन्नः पूर्वश्लोकः ।

तथा यार्थेव टघग त्रिभुजस्य जात्यत्वात्तत्र टघग कोणस्य समकोणत्वात् घ टघग त्रिभुजोपरिगवृत्तस्य व्यासः टग भवति । तेन क्षेत्रमित्या—

घन² = टन×नग । उपपन्नं सर्वम् ।

[२५] कानिचिद्वृत्तादरणानि ।

(१) यदि म.घग समत्रिभुजं कल्प्यते तदा नाग रेखा द्विनिघ्नस्थिरकोटि समाना भवेत् ।

(२) परवलयस्थात् कस्माच्चन बिन्दोः स्पर्शरेखां विनैव तद्विपरीतनयमध्यलम्बः साधनीयः ।

(३) घग² = ४सना·घना ।

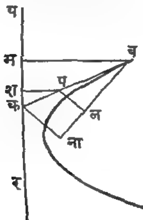
(४) यदि नाग रेखाया मध्यबिन्दुः [illegible] कल्प्यते तदा घप²-घग² = ४ नास ।

(५) यदि नाघ पूर्वरेखोपरि प बिन्दौ लम्बो निपात्यते [illegible] च व्यासरेखायां ग बिन्दौ मिलति तदा गन = २नास भविष्यति ।

(६) यदि ग विन्दोः नाथ रेखोपरि गत लम्बो निष्काश्यते तदा घत = रसना भविष्यति ।

षड्विंशी प्रतिज्ञा ।

स्पर्शविन्दौ गता रेखा नाभितो नाभिजाभिधा ।
रेखिका स्यात्सदैवेति वदन्ति गणका इह ॥ ४७ ॥
यदि स्पर्शरेखास्थविन्द्वोर्विधेयौ
बुधा नाभिरेखाऽक्षयोर्लम्बरूपौ ।
तदा नाभिरेखागताल्लम्बमूला—
दधः खण्डकं चान्यलम्बेन तुल्यम् ॥ ४८ ॥



[illegible] कल्प्यते घर = अक्षरेखा
ना = नाभिः
घक = स्पर्शरेखा
घना = नाभिजरेखा
[illegible] = स्पर्शरेखास्थकोऽपि विन्दुः
पश = अक्षरेखोपरि लम्बरेखा
पल = नाभिजरेखोपरिलम्बः

नाल = नाभिअरेखाधः खण्डम् ।

तदा पश = नाल भविष्यतीति ।

अत्रोपपत्तिः । अत्र अदरेखोपरि यम लम्बमुत्पाद्य यनाक त्रिभुजस्य जात्यत्वात् पल, कना समानान्तरे भवतस्तेन क्षेत्रमित्या—

$$\frac{\text{पक}}{\text{यक}} = \frac{\text{नाल}}{\text{यना}}$$

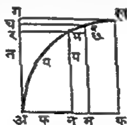
एवं $$\frac{\text{पक}}{\text{यक}} = \frac{\text{पश}}{\text{यम}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{नाल}}{\text{यना}} = \frac{\text{पश}}{\text{यम}}$$

$$\therefore \quad \text{नाल} = \text{पश}$$ उपपन्नम् ।

सप्तविंशी प्रतिज्ञा ।

व्यासकोट्योर्हनेस्त्र्यंशौ द्वौ भवेदिह सन्ततम् ।
परादियलयस्यैव सुसूक्ष्मं हि फलं बुधाः ॥ ४२ ॥



अत्र तावत्कल्पने अकखग परवलयक्षेत्रं यस्य फलानयनममीष्टम् ।

अत्र अग रेखा अ विन्दौ स्पर्शरेखा विधेया ।

ततः   अक = व्यासः = व ।

व्यास   खक = कोटिः = र ।

अतो व्यासकोटिभ्यां अकखग आयतक्षेत्रं जायते ।

तदा अफखग आयतक्षेत्रस्य त्रिभागद्वयसमं अफख चापात्मकपरवलयक्षेत्रस्य फलं भविष्यतीति ।

अत्रोपपत्तिः । अत्रापि कोट्यानयनेन—

$$\text{पफ}^2 = \text{४प}\cdot\text{अफ}$$

$$\text{भन}^2 = \text{४प}\cdot\text{अन}$$

$$\text{यम}^2 = \text{४प}\cdot\text{अम} \ldots\ldots \text{इत्यादि ।}$$

$$\text{अफ} = \frac{\text{पफ}^2}{\text{४प}} = \frac{\text{अत}^2}{\text{४प}}$$

$$\text{अन} = \frac{\text{भन}^2}{\text{४प}} = \frac{\text{अर}^2}{\text{४प}}$$

$$\text{अम} = \frac{\text{यम}^2}{\text{४प}} = \frac{\text{अख}^2}{\text{४प}} \ldots\ldots \text{इत्यादि ।}$$

अत्र यदि अग रेखाया न विभागः क्रियते तदा तत्रैकविभागस्वरूपम् $= \frac{\text{अग}}{\text{न}} = \text{अत} = \text{तर} = \text{रख} = \text{खग}$ ......इत्यादि ।

यदि प्रकल्प्यते तदा

$$\text{अतपफ} = \text{अत}\cdot\text{अफ}$$

$$= \text{अत}\frac{\text{पफ}^2}{\text{४प}}$$

$$= \text{अत}\frac{\text{अत}^2}{\text{४प}}$$

$$= \frac{\text{अत}^3}{\text{४प}}$$

$$= \frac{\text{अग}^3}{\text{४प}\cdot\text{न}^3}$$

ततः $\text{तरभय} = \text{तर}\cdot\text{तय}$

$$= \text{तर}\cdot\text{अन}$$

$$=\text{अत}\frac{\text{अग}^{२}}{४\text{प}}$$

$$=\text{अत}\frac{४\text{अन}^{२}}{४\text{प}}$$

$$=\frac{४\text{अग}^{२}}{४\text{प}\cdot\text{न}^{२}}$$

एवं चरछय $=\text{चर}\cdot\text{छय}$

$$=\text{चर}\cdot\text{अम}$$

$$=\text{अत}\frac{\text{यम}^{२}}{४\text{प}}$$

$$=\text{अत}.\ \frac{९\ \text{अन}^{२}}{४\text{प}.}$$

$$=\frac{९\text{अत}^{२}}{४\text{प}}$$

$$=\frac{९.\text{अग}^{२}}{४\text{प}.\ \text{न}^{२}}$$ इत्यादि सर्वत्र ।

अत्र सर्वेषामायतक्षेत्राणां योगेन अपमरक्षग क्षेत्रफले अपफ, पमय, मयछ इत्यादि त्रिभुजानां फलानि सम्मिलितानि सन्ति ।

अपमरक्षगक्षेत्रफल+त्रिभुजफल

$$=\frac{\text{अग}^{२}}{४\text{प}\ \text{न}^{२}}\ (१+४+९+१६+\cdots\text{न}^{२})$$

$$=\frac{\text{अग}^{२}}{४\text{प}.\ \text{न}^{२}}\ \frac{\text{न}\ (\text{न}+१)\ (२\ \text{न}+१)}{२\times३}$$

$$=\frac{\text{अग}^{२}}{४\text{प}\ \text{न}^{२}}\ \frac{(\text{न}+१)\ (२\ \text{न}+१)}{२\times३}$$

अत्र न संख्या यथाऽ २ धिका कल्प्यते तथा $\frac{\text{अग}}{\text{न}}$ मान

स्वल्पं भवेत्तथा अपफ, पमय इत्यादि त्रिभुजानि च स्वल्पानि

भवति । एवं परमाधिकेऽनन्तसमे न माने $\frac{\text{अग}}{\text{न}}$ शून्यसमं भवेत्तथा अपफ, पभय इत्यादीनां त्रिभुजा फलानां योगो हि अपभवख चापरूपमेव भवेत् ।

एवं च तत्र $\frac{(\text{न}+१)(२\text{न}+१)}{२.३} = \frac{\text{न}^२}{३}$ भवति

$$\text{अतः अपभयखगक्षेत्रफल} = \frac{\text{अग}^३}{४\text{प}.\ \text{न}^३} \times \frac{\text{न}^३}{३}$$

$$= \frac{\text{अग}^२}{४\text{प}} \times \frac{\text{अग}}{३}$$

$$= \frac{\text{अक}.\ \text{अग}}{३}$$

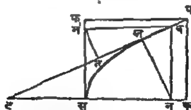
$$\text{अतः आखकपरवलयक्षेत्रलम्} = \text{अक}.\ \text{अग} - \frac{\text{अक}.\ \text{अग}}{३}$$

$$= \frac{२\ \text{अक}.\ \text{अग}}{३}$$

$$= \frac{२\ \text{य} \times \text{र}}{३}$$

एतेनोपपन्नं सर्वम् ।

अथ वा प्रकारान्तरेण वासना ।



अत्रापि स न = व्यासः = य,
य न = कोटिः = र,
सयन = परवलयक्षेत्रम् ।
यस्य फलं ज्ञातव्यमस्तीति ।

अत्रोपपत्तिः । व स्थानात् वट स्पर्शरेखां तथा स स्थानात् सफ स्पर्शरेखां च विधाय वम लम्बः समुत्पादनीयः । तथा म, न बिन्दुभ्यां क्रमेण मत, नल लम्बौ कार्यौ ।

अथ प बिन्दुस्तथा कल्पितो यथा प, व बिन्द्वोरन्तरं रेखारूपमेव स्यात्तथा सति प बिन्दोः पक, पफ लम्बौ संपादनीयौ ।

अथ च पूर्वोक्तयुक्तया—

टन = २सन

= २वम

परं च टलन, वमत त्रिभुजयोः साजात्यतः—

$$\frac{नल}{टन} = \frac{मत}{वम}$$

∴ नल = २मत सिद्धयति ।

अथ च वप आधारे स्थितयोः वपकन, वपफम चतुर्भुजयोः फलयोर्यः सम्बन्धः स एव तल्लम्बयोरपि भवतीत्यतः—

$$\frac{वपफम}{वपकन} = \frac{मत}{नल}$$

∴ २ वपफम = वपकन सिद्धम् ।

एतेनावसीयते यत् किल सवन, सवम क्षेत्रयोरपि तादृशसूक्ष्मविभागस्थितानां चतुर्भुजानां समवायेनैव समुत्पन्नत्वात्त्रापि पूर्वप्रतिपादितयुक्तेरनिवार्यत्वात् च सवन क्षेत्रमपि सवम क्षेत्रफलतो द्विगुणं स्यादिति स्पष्टमतः—

सवनक्षेत्रफल = २ सवमक्षेत्रफल.

∴ ३ सवमक्षेफ = सवनक्षेफ + सवमक्षेफ.

= सनवमआयतक्षेफ.

= सन. वन

= य×र.

$$∴ \quad सवमक्षेफ = \frac{य \times र}{३}$$

$$∴ \quad सवनक्षेफ = \frac{२य \times र}{३}$$ उपपन्नम् ।

इति परवलयगणितं समाप्तम् ।

छात्राणां बुद्धिवैशद्यार्थं कनिचन प्रश्नाः प्रदर्श्यन्ते ।

(१) परवलये कोटयो नाभिगतरेखा या यदि समानसम्बन्धेन विभज्य-न्ते तदा तद्विभागबिन्दुभिर्जायमानं वक्रं परवलयमेव भवति ।

(२) परवलयस्यैकस्यापि बिन्दोः स्पर्शरेखा कयाऽपि नाभिगतरेखया सह यदि समानमेवकोणं समुत्पादयति तदा स्पर्शरेखानाभिगतरेखयोर्योग-बिन्दुभ्रमणमार्गोऽन्विष्यताम् ।

(३) पव, पवं परवलयस्य द्वे स्पर्शरेखे स्तः । ववं रेखाया मध्यबिन्दुः न तथा ववं रेखाव्यासरेखयोर्योगः न कल्पितः । पग रेखा यद्यक्षरेखायां क बिन्दौ युनक्ति तदा पकनला क्षेत्रं समानान्तरचतुर्भुजं संजायते । अत्र ना पर-वलयस्य नाभिरस्ति ।

(४) सव एका पूर्णज्याऽस्ति परवलयस्य । तत्र व बिन्दोः सव पूर्णज्यो-परि लम्बो व्यासरेखां ग बिन्दौ छिनत्ति तदा गन रेखा द्विघ्नस्थिरकोटिम [illegible]

([illegible]) [illegible]

(६) निर्दिष्टपरवलयान्तस्त्रिभुजं विरच्यताम् । यस्य त्रयोभुजा निर्दिष्ट त्रिभुजभुजैः समानान्तरा भवेयुः ।

(७) द्विघ्नकोट्यवच्छिन्नपरवलयस्यान्तर्वृत्तं विधेयम् ।

(८) वगवं परवलयस्य मध्यलम्बिरूपपूर्णज्या, यत्र मध्यलम्बव्यासयोर्योगः ग स्यात् । तथा वन, वंनं य, वं बिन्दो· कोटीस्तत्स्वदा सम, वंनं, वन, ४प चतस्रो रेखा अनुपातीया भवन्ति ।

(९) यदि द्वयोः परवलयोरेक एव नाभिः स्यात्तदा तयोरेकपूर्णज्या तयोरक्षरेखयोर्योगबिन्दुगामिनी भवेत् । तथा तत्कोणमपि समद्विभागं व विदधाति ।

(१०) यदि तयोरनन्तवलययोरेक एवाक्षस्तदा तयोरेका पूर्णज्या तयो र्नाभिलग्नरेखामर्धयिष्यति तथा तदुपरि लम्बश्च भवति ।

(११) तद्बिन्दुभ्रमणमार्गोऽन्विष्यतां यत्र खलु निर्दिष्टवृत्तात्परमाल्पा न्तरे तद्वृत्तीयनिर्दिष्टव्यासरेखाया लम्बीयान्तरेण समाने निष्पद्यते ।

(१२) यदि स, ना बिन्दुभ्यां परवलयस्पर्शरेखोपरि सलं, नाल लम्बौ विधीयेते तदा

नाल^{2} = नाल सलं + सना^{2} भविष्यति ।

(१३) परवलयमेकं तथा त्रिच्यतां यथा तन्निर्दिष्टरेखात्रयं स्पृशति तथा यस्य नाभिरन्यनिर्दिष्टरेखायां च वरीवर्ति।

(१४) पव, पव' परवलयस्य स्पर्शरेखे स्तः। यदि नाव+नाव' स्थिरा कल्प्यते तदा प विन्दुभ्रमगं परवलयपरिधौ भवेत्। तत्र स्थिराकोटिश्च केति निर्णेयताम्।

(१५) यदि वव' नाभिगता पूर्णज्या स्यात् तदा
मना वव' = नाव नाव' भविष्यति।

(१६) यदि व, व' विन्द्वोः स्पर्शरेखयोर्योगः ट, तथा ते द्वे तृतीयस्पर्श-रेखया म, य विन्द्वोश्छिन्ने तदा

$$\frac{टम}{टव}+\frac{टय}{टव'}=१$$ भविष्यति।

(१७) यदि ना विन्दोः परवलयस्यैकस्माच्चलविन्दोः स्पर्शरेखामध्यल-म्बयोरुपरि नाल, नाल' लम्बौ विधीयेते तदा लल' रेखा व्याससमाना-न्तरा भवेत्।

(१८) यदि काऽपि रेखा वनाव' नाभिगतपूर्णज्यामर्धयति तथा तत्र ममकार्ग व समुत्पाद्य व्यासरेखायां अ विन्दौ च मिलेत्तदा
वव' = २नाअ भविष्यति।

(१९) शीर्षविन्दुं, स्पर्शरेखां तथा चतुर्गुणनरमानं च विज्ञाय परवलय-रचना कार्या।

(२०) नाभिगतपूर्णज्याग्रविन्दुभ्यां विहितौ मध्यलम्बौ मिथो लम्बरूपौ भवेतां तथा तयोर्योगविन्दुभ्रमणं च परवलयपरिधावेव स्यात्।

(२१) मिथः स्पर्शन्ते द्वे वृत्ते यदि परवलयं स्पृशतस्तथा ययोः केन्द्रे च व्यासरेखायामेव स्यातां तदा तद्वृत्तव्यासार्धयोरन्तरं चतुर्गुणितन-रेण समानं स्यादिति निर्णेयताम्।

(२२) नाभिगतपूर्णज्यैकप्रान्ताद्विहितोऽन्यो व्यासस्तदन्यप्रान्ताद्वि-हितं पूर्णज्यास्वरूपं मध्यलम्बमर्धयिष्यति।

(२३) परवलये कस्यापि विन्दोर्मध्यलम्बस्तदीयमध्यलम्बाधस्त्रिघाति-न्या कोट्या समो भवतीति।

(२४) नाभीयपूर्णज्याग्राभ्यां यौ मध्यलम्बौ स्तस्तयोर्वर्गयोगो द्विगुणितनरवर्गसमो भवेत् यत्र च स्पर्शरेखयोर्योगविन्दोः पूर्णज्योपरि ल म्बरूपा स्यात्।

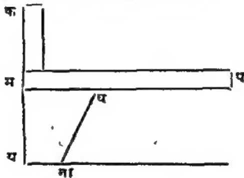
(२५) परवलयस्यकस्यापि बिन्दोः स्पर्शरेखा स्थिरकोटावक्षरेखायां च नाभितुल्यान्तरे एव लगति ।

(२६) परवलये त्रिभिः स्पर्शरेखाभिर्यस्त्रिभुजं विरच्यते तत्तु स्पर्शबिन्दुत्रयनिर्मितत्रिभुजस्य दलेन समं भवति ।

(२७) परवलये पूर्णज्यया निर्मितचापक्षेत्रफले पूर्णज्याधारे स्पर्शरेखाभ्यां निर्मितत्रिभुजफलस्य द्वौ तृतीयांशौ भवति ।

अथ छात्राणामुपकृते परवलयलेखनयुक्तिः प्रदर्श्यते ।

अत्र पारवलयिकपरिभाषया कस्मादपि बिन्दोर्नियमितबिन्दुपर्यन्तं यत्सरलदूरान्तरं स्यात्तदेव तद्बिन्दोरेव नियतरेखावधि लम्बरूपमन्तरं स्यादिति तत्र तावज्ज्ञायते । समानसम्बन्धस्य सदैव रूपसमत्वात् ।



अथ कल्प्यते मा नियमितबिन्दुस्तथा यम नियमितरेखाऽक्षसंज्ञका च । तथाऽत्र कम, मप मिथो लम्बरूपा जातत्रिभुजाकारैका चिक्कणा पट्टी धार्या यस्या अंके प बिन्दौ सूत्रस्यैकाग्रं निबध्य पम समानं सूत्रं धृतम् ।

अथ सूत्रस्य द्वितीयाग्रं मा बिन्दौ निबध्य पट्ट्या म बिन्दुमक्षरेखायां च नियोज्य यदि कमप पट्टी समानभूमौ यथा समानान्तररूपेण रेखायां चलेत्तदा पट्ट्यां लग्निकया एको घ बिन्दुः परवलयं निर्माणोति स्फुटमेव गणितज्ञानां बुद्धिमतां विदुषामिति ।

वैदुष्यामलदीप्ति गुणमतः पुनरभ्यसतिव

लास्ये त्रिवेद्यप्रभूमि गुणिविषयकलपम् ।

ज्ञानश्रीं गगनमांशयत्रिविष्यै

तेषां सदैव सुग